§ 1 Graphenminimalflächen in $\mathbb{R}^3$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graph $\{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \Omega\}$ wir mit G_f bezeichnen wollen. G_f ist eine Fläche (= 2-dim. Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^3$), deren Inhalt durch die Formel

$$(1.1) \qquad A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

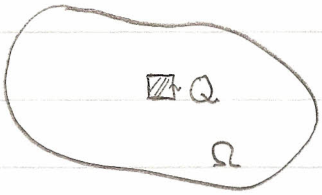
gegeben ist. Hierbei steht $\nabla f(x,y)$ für den Vektor mit den Komponenten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) , \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right).$$

Die Formel (1.1) läßt sich auf zwei Wegen einsehen: entweder man nimmt (1.1) einfach als Definition für den Flächeninhalt eines Graphen (schlecht, da nicht motiviert) oder man definiert auf $\mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales geometrisches Maß (das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^2$) und zeigt, daß das Maß eines Graphen gerade durch die rechte Seite von (1.1) gegeben wird. (das läuft auf eine Transformationsformel für das Oberflächenmaß hinaus) Wir gehen einen Mittelweg, indem wir uns überlegen, daß

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

den Flächeninhalt des Graphen vernünftig wiedergibt:



Sei Q ein kleines Quadrat in Ω mit Mittelpunkt a. Auf Q können wir $f(z)$ näherungsweise ersetzen durch die affine Funktion

$$l(z) := f(a) + \nabla f(a) \cdot (z-a),$$

wobei $z := (x,y)$ abgekürzt worden ist. Es folgt in guter Näherung

$$A_Q(f) = A_Q(l),$$

d.h. die Fläche von G_f über Q entspricht in etwa der Fläche des Graphen von l über Q.

Wie groß ist nun $A_Q(l)$ bzw. welchen Wert wird man als sinnvolle Definition von $A_Q(l)$ ansehen?

Es ist

$$\{(z, l(z)) : z \in Q\} = \{\underbrace{(z, z \cdot \nabla f(a))}_{=:L(z)} + \underbrace{(0, f(a) - a \cdot \nabla f(a))}_{=:L_0} : z \in Q\}$$

mit einer linearen Funktion $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und einem konstanten Vektor $L_0 \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\mathrm{Graph}(l|_Q) = L(Q) + L_0 .$$

Die Verschiebung L_0 sollte am zu definierenden Flächeninhalt von $\mathrm{Graph}(l|_Q)$ nichts ändern, so daß wir letztendlich darauf geführt werden, der Menge $L(Q)$ einen Flächeninhalt zuzuordnen.

Dazu nehmen wir an, daß Q achsenparallel ist und die linke untere Ecke gerade im Ursprung liegt. Dann ist

$$Q = \{ s \cdot e_1 + t \cdot e_2 : \quad 0 \leq s, t \leq \varepsilon \},$$

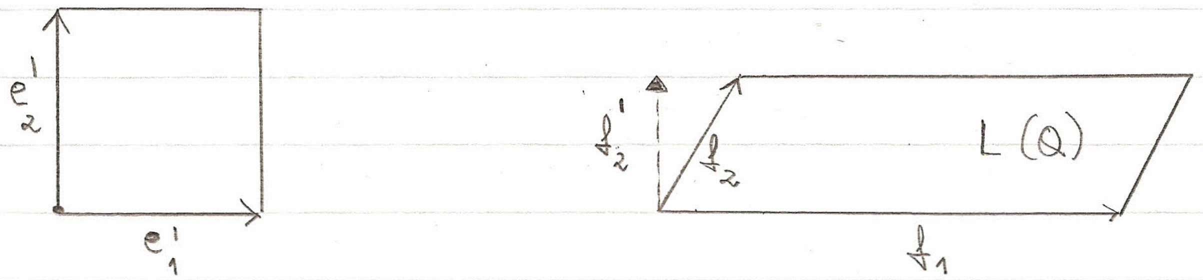
$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1), \quad \varepsilon = \text{Kantenlänge von } Q,$$

und

$$L(Q) = \{ s \cdot L(e_1) + t \cdot L(e_2) : 0 \leq s, t \leq \varepsilon \}$$

$$= \{ s \cdot L(e_1') + t \cdot L(e_2') : 0 \leq s, t \leq 1 \},$$

$$e_1' := \varepsilon \cdot e_1 \,, \quad e_2' := \varepsilon \cdot e_2 \,.$$



$L(Q)$ ist das von f_1, f_2 $\quad (f_i := L(e_i'))$ aufgespannte Parallelogramm in der Ebene

$$E = \{ (-\nabla f(a), 1) \}^{\perp} .$$

Bezeichnet f_2' die orthogonale Projektion von f_2 auf das orthogonale Komplement von f_1 in E, so gilt bekanntlich

$$\text{Inhalt von } L(Q) = |f_1| \cdot |f_2'| .$$

Mit

$$f_2' = f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|}\right) \frac{f_1}{|f_1|}$$

folgt:

$$|f_1| \cdot |f_2'| = \left| \, |f_1| \cdot f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|}\right) f_1 \right| =$$

$$\left(|f_1|^2 \cdot |f_2|^2 - 2 \cdot (f_1 \cdot f_2)^2 + (f_1 \cdot f_2)^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left(|f_1|^2 \cdot |f_2|^2 - (f_1 \cdot f_2)^2 \right)^{1/2} =$$

$$\varepsilon^2 \cdot \left(|L(e_1)|^2 \, |L(e_2)|^2 - (L(e_1) \cdot L(e_2))^2 \right)^{1/2} =$$

$$\varepsilon^2 \cdot \left((1 + |\partial_1 f(a)|^2) \cdot (1 + |\partial_2 f(a)|^2) - (\partial_1 f \cdot \partial_2 f)^2(a) \right)^{1/2} =$$

$$\varepsilon^2 \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2} ,$$

deshalb gilt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2} \cdot \text{Inhalt von } Q .$$

Anschaulich ist klar, daß

$$A_\Omega(f) \approx A_{\cup Q_i}(f)$$

richtig ist, wenn man Ω durch Quadrate Q_i approximiert, also

$$A_\Omega(f) \approx \sum_i \sqrt{1+|\nabla f(a_i)|^2} \cdot \text{Inhalt von } Q_i$$

$$\longrightarrow \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

bei wachsender Güte der Zerlegung von Ω in achsenparallele Quadrate.

Vermöge der vorstehenden Rechnung haben wir erkannt, daß

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy$$

ein vernünftiger Ausdruck für die Fläche von G_f ist. Es sei ausdrücklich betont, daß $A_\Omega(f)$ durchaus $= \infty$ sein kann. Die Endlichkeit von $A_f(\Omega)$ ist zum Beispiel dann gesichert, wenn sowohl Ω als auch ∇f als beschränkt vorausgesetzt werden.

Nachfolgend sei f von der Klasse $C^2(\Omega)$. φ bezeichne eine C^2-Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{spt} \varphi := \overline{\{ z \in \Omega : \varphi(z) \neq 0 \}}$$

$$\subset D_r(z_0) := \{ z \in \mathbb{R}^2 : |z - z_0| < r \}$$

für einen Punkt $z_0 \in \Omega$ und einen kleinen Radius r, so daß die offene Kreisscheibe noch ganz in Ω enthalten ist.

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig, so unterscheiden sich die Graphen G_f und

$G_{f+\varepsilon\cdot\varphi}$ höchstens außerhalb des Zylinders $D_r(z_0) \times \mathbb{R}$,

und wenn G_f lokal den Flächeninhalt unter allen Graphen über Ω minimiert, folgt

$$A_{D_r(x_0)}(f) \le A_{D_r(x_0)}(f+\varepsilon\cdot\varphi) \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{d\varepsilon|0} \int_{D_r(x_0)} \left(1 + |\nabla f + \varepsilon\cdot\nabla\varphi|^2\right)^{1/2} dx\, dy = 0,$$

was nach Differentation unter dem Integralzeichen äquivalent ist zu

$$0 = \int_{D_r(x_0)} \left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi \; dx\, dy .$$

Schreibt man

$$\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi =$$

$$\operatorname{div}\left(\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \nabla f \; \varphi \right) - \operatorname{div}\left(\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \nabla f \right) \cdot \varphi$$

und beachtet

$$\int_{D_r(x_0)} \operatorname{div}\left(\left(1+|\nabla f|^2\right)^{-1/2} \nabla f \cdot \varphi \right) dx \cdot dy = 0$$

nach dem Satz von Gauß (φ verschwindet ja auf $\partial D_r(x_0)$),

so gilt

$$0 = \int_{D_r(x_0)} \varphi \cdot \operatorname{div}\left((1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) dx\, dy$$

für jede Funktion φ mit Träger in $D_r(x_0)$. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Größe

$$\operatorname{div}\left((1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right)$$

auf $D_r(x_0)$ verschwindet. Da im Falle der lokalen Minimalität dies für jede Kreisscheibe $D_r(x_0)$ richtig sein muß, ist bewiesen

SATZ 1.1: Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit

$$A_{\Omega'}(f) \le A_{\Omega'}(g)$$

für jedes kompakt in Ω enthaltene Teilgebiet Ω' und jede C^2-Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{spt}(f-g) \subset \Omega'$. Dann löst f die sogenannte

explizite (oder nicht-parametrische) Minimalflächengleichung

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0} \; .$$

Steht Δf für den Laplace Operator

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

so läßt sich die explizite Minimalflächengleichung auch schreiben als

$$(1+|\nabla f|^2)\cdot\Delta f = D^2 f\,(\nabla f,\nabla f),$$

wo $D^2 f\,(\nabla f,\nabla f)$ die Anwendung der symmetrischen Bilinearform $D^2 f$ auf das Paar $(\nabla f,\nabla f)$ bedeutet.

Ausgeschrieben lautet das Ergebnis:

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

und man sieht, daß es sich um eine <u>nichtlineare</u> <u>partielle</u> <u>Differentialgleichung</u> <u>zweiter Ordnung</u> handelt.

Wie wir im nächsten §en sehen werden, bedeutet die nichtparametrische Minimalflächengleichung geometrisch, daß G_f eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung H ist. Im Falle von allgemeinen Flächen $S\subset\mathbb{R}^3$ bedeutet $H\equiv 0$ keineswegs, daß S den Flächeninhalt zu seinem Rand minimiert. (Das ist wie in der gewöhnlichen Extremwertrechnung: das Verschwinden der Ableitung garantiert noch nicht, daß man eine Minimalstelle gefunden hat.) Anders verhält es sich, wenn man die zusätzliche Information hat, daß die betrachtete Fläche S ein Graph ist, d.h.:

f löst die nichtparametrische Minimalflächengleichung $\Longrightarrow$

Fläche G_f $\leq$ Flächeninhalt einer beliebigen 2 Mfkt. S mit Rand $G_{f|\partial\Omega}$ und $S\subset\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$